Analiza zespolona
Lista 9

Zad 1. Niech f będzie funkcją ciągłą spełniającą warunek $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^a}$ gdzie $a > 1$ i $M > 0$ są stałe. Wykazać, że

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma(r)} f(z)\, dz = 0, \qquad \text{gdzie } \Gamma(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Zad 2. Obliczyć całki

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-2}{x^4+1}\, dx, \quad ac - b^2 > 0,$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+1}{(x^2+1)^3},$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}},$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{ax^2+2bx+c}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad ac - b^2 > 0.$

Zad 3 (Lemat Jordana)**.** Niech funkcja f będzie taka, że wielkość

$$M(R) = \max_{z\in\Gamma(R)} |f(z)|$$

dąży do zera, gdy $R \to \infty$. Wykazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma(R)} f(z) e^{i\varepsilon z}\, dz = 0.$$

Zad 4. Sformułować i wykazać wersję Zadania 3, która miałaby zastosowanie na dolnej półpłaszczyznie.

Zad 5. Znaleźć jawną postać funkcji $\varphi(t)$ zmiennej rzeczywistej danej wzorem

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\, dx.$$

Zad 6. Niech $a, b > 0$. Obliczyć całki

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\, dx,$ **b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+b^2}\, dx,$ **c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(1+x^2)^4}\, dx,$

d) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\, dx,$ **e)** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+b^2}\, dx,$ **f)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+i)}\, dx.$

Zad 7. Funkcję *sinus całkowy* określa się wzorem

$$\operatorname{si} x = -\int_{x}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Obliczyć wartość tejże funkcji w zerze.